

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ, 23.01.2010**  
**Cls. a X-a**

- I. a) Să se arate că dacă  $x = \log_a bc$ ,  $y = \log_b ac$ ,  $z = \log_c ab$ , atunci  
 $x + y + z + 2 = xyz$   
b) Fie  $a, b, c$  numere reale strict pozitive. Arătați că dacă,  $2^a = 35$ ,  $5^b = 14$ ,  
 $7^c = 10$  atunci  $abc - (a + b + c) = 2$ .
- II. Se consideră numerele complexe  $z_1, z_2, z_3$  astfel încât  
 $z_1 + z_2 \in R$ ,  $z_3 \cdot z_1 + \overline{z_3} \cdot z_2 \in R$  și  $z_3 \in C - R$ . Să se demonstreze  
că  $z_1^{2010} + z_2^{2010} \in R$ .
- III. Să se demonstreze că  $\forall a, b, c \in (1, \infty)$ , are loc inegalitatea:  
$$(ab)^{\sqrt{\log_a c \cdot \log_b c}} + (bc)^{\sqrt{\log_b a \cdot \log_c a}} + (ac)^{\sqrt{\log_a b \cdot \log_c b}} \geq a^2 + b^2 + c^2.$$
  
Se cunoaște : dacă  $x, y > 1$ , atunci  $\log_x y > 0$ .
- IV. Fie  $z_1, z_2, z_3 \in C^*$  cu  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$  și  $|z_1| = a$ ,  $|z_2| = b$ ,  $|z_3| = c$ . Știind că  
 $a^2 + b^2 = c^2$ , arătați că  $b^2 z_1^2 + a^2 z_2^2 = 0$ .

(Gazeta Matematică nr.3/2009)

[www.mategl.com](http://www.mategl.com)

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare subiect este punctat cu 7 puncte